



[문제 1-1]

i)  $0 \leq x < \frac{1}{2}\pi$  일 때

$y = \sin x$ 는 실수 전체의 집합에서 단변함수로  $\frac{\sin x - \sin(x - \cos x)}{\cos x} = \cos t$ 인  $t$ 가 구간  $(x - \cos x, x)$ 에 존재한다.

$0 \leq x < \frac{1}{2}\pi$  일 때  $x - \cos x$ 의 최솟값은 구하면  $y = x - \cos x$ 에서  $y' = 1 - \sin x \geq 0$  이므로

최솟값은  $0 - \cos 0 = -1$ ,  $0 \leq x < \frac{1}{2}\pi$  일 때  $x < \frac{1}{2}\pi$  이므로  $0 \leq x < \frac{1}{2}\pi$ 인 모든  $x$ 에 대해

$-1 \leq t < \frac{1}{2}\pi$  이다. 따라서  $0 \leq x < \frac{1}{2}\pi$  일 때  $\frac{\sin x - \sin(x - \cos x)}{\cos x} = \cos t > 0$ ,  $\sin x - \sin(x - \cos x) > 0$ 이다.

ii)  $x = \frac{1}{2}\pi$  일 때

$$\cos x = 0 \text{ 이므로 } \sin x = \sin(x - \cos x)$$

iii)  $\frac{1}{2}\pi < x \leq \pi$  일 때

i)와 같은 방향으로  $x - \cos x > \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ,  $x \leq \pi$  이므로  $\frac{1}{2}\pi < x \leq \pi$ 인 모든  $x$ 에 대해

$\frac{\pi}{2} < t \leq \pi$  이다. 따라서  $\frac{1}{2}\pi < x \leq \pi$  일 때  $\frac{\sin x - \sin(x - \cos x)}{\cos x} = \cos t < 0$ ,  $\sin x - \sin(x - \cos x) > 0$ 이다.

i), ii), iii)에 의해  $\sin x \geq \sin(x - \cos x)$ 이고, 등호는  $x = \frac{\pi}{2}$  일 때 성립한다.

따라서 구간  $[0, \pi]$ 에서



		2/6



[문제 1-2]

$$-x \cos'(-x) = -x \cos^2 x, (-x)^3 \cos(-x) = -x^3 \cos x, \sin(-x) = -\sin x \text{ 이므로}$$

$$y = -x \cos^2 x + x^3 \cos x + \sin x \text{ 는 기함수이고, 따라서 } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-x \cos^2 x + x^3 \cos x + \sin x) dx = 0 \text{ 이다.}$$

2



[문제 1-3]

$f(-x) = -2x \cos 2x + \sin x = -f(x)$ , 따라서  $g(x) = 2x(2x f(x) - \cos 2x)$ 라 하면  
 $-g(x) = g(-x)$  이므로  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x(2x f(x) - \cos 2x) dx = 0$ ,  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0$ , 그러므로  
 주어진 정적분의 값은

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2x f(x) - \cos 2x) dx$  가  $\frac{1}{2}$  이므로,  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2x f(x) - \cos 2x) dx = \left[ 2x^2 \sin 2x + 2x \cos 2x - \frac{3}{2} \sin 2x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$   
 $= -\pi - 2 - [\pi + 2] = -2\pi - 4$

3



		4/6



[문제 2-1]

$$\cos(t)\cos(\frac{1}{3}\pi - t) + \sin t \sin(\frac{1}{3}\pi - t) = \cos(2t - \frac{1}{3}\pi) \dots (1)$$

$$\cos(t)\cos(\frac{1}{3}\pi - t) - \sin t \sin(\frac{1}{3}\pi - t) = \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2} \dots (2)$$

$$(1) - (2) \text{를 하면 } 2\sin t \sin(\frac{1}{3}\pi - t) = \cos(2t - \frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{2}$$

$$\sin t \sin(\frac{1}{3}\pi - t) = \frac{1}{2} \cos(2t - \frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{4} \text{ 이므로 } \{a, b, c, d\} \text{ 중 하나는 } \{\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{4}\} \text{ 이다.}$$

4



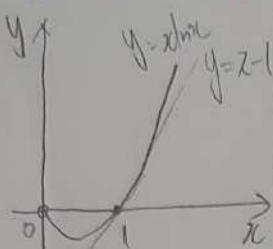
[문제 2-2]

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 1$ ,  $\angle PAB = \angle QBC = \angle RCA = t$ ,  $\angle PBA = \angle QCB = \angle RAC = \frac{\pi}{3} - t$  이므로  
 $\triangle ABP \cong \triangle BCQ \cong \triangle CAR$  (ASA)이다. 따라서  $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR}$ ,  $\overline{AR} = \overline{BP} = \overline{CQ}$  이므로  
 $\overline{RP} = \overline{PQ} = \overline{QR}$  이고,  $\triangle RPQ$ 는 정삼각형이다. 따라서  $\angle APB = \frac{2}{3}\pi$  이고,  
 사인 법칙에 의해  $\overline{PB} = 1 \times \frac{\sin t}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{2\sqrt{3}\sin t}{3}$  이므로  $\triangle ABP$ 의 넓이는  $\frac{1}{2} \times \sin(\frac{1}{3}\pi - t) \times 1 \times \frac{2\sqrt{3}\sin t}{3}$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{3} (\frac{1}{2} \cos(2t - \frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{4})$  (문제 2-1) 이다. 따라서  $\triangle RPQ$ 의 넓이는  $\frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} (\frac{1}{2} \cos(2t - \frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{4})$   
 이므로  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} S(t) dt = \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin(2t - \frac{1}{3}\pi) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{3}{8} - \left[ -\frac{3}{8} \right] = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{3}{4}$

5

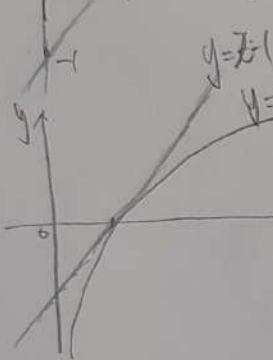


[문제 2-3]



$y = x \ln x$ 에서  $y' = \ln x + 1$ 이므로 구하려는 부분의 넓이는

$$\int_1^t (x \ln x - (x - 1)) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{3}{4} x^2 + x \right]_1^t = \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{3}{4} t^2 + t - \frac{1}{4}$$



$y = \ln x$ 에서  $y' = \frac{1}{x}$ 이므로 구하려는 부분의 넓이는

$$\int_1^t (x - 1 - \ln x) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 - x \ln x - \frac{1}{2} \right]_1^t = \frac{1}{2} t^2 - t \ln t - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{3}{4} t^2 + t - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} t^3 - t^2 \ln t - \frac{1}{2} t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln t}{2t} - \frac{3}{4t} + \frac{1}{t} - \frac{1}{4t^2}}{\frac{1}{2} - \frac{\ln t}{t} - \frac{1}{2t}}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ 를 조사하면  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$ 이다.  $f(x) = x^2 e^{-x}$ 라 하면

$f'(x) = (-x^2 + 2x) e^{-x}$ 이므로 구간  $[0, \infty)$ 에서  $f(x)$ 는 최대값  $4e^{-2}$ 를 갖는다.

$x \geq 0$ 일 때  $0 \leq x^2 e^{-x} \leq 4e^{-2}$ 이므로  $0 \leq x e^{-x} \leq \frac{4e^{-2}}{x}$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$ 이므로 샌드위치 정리에 의해  $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0$ 이다.

따라서  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t q(t)} = 0$ 이다.